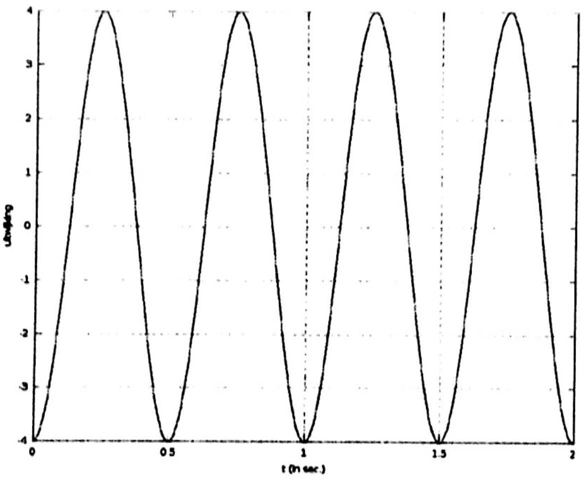
Tentamen Signalen & Systemen

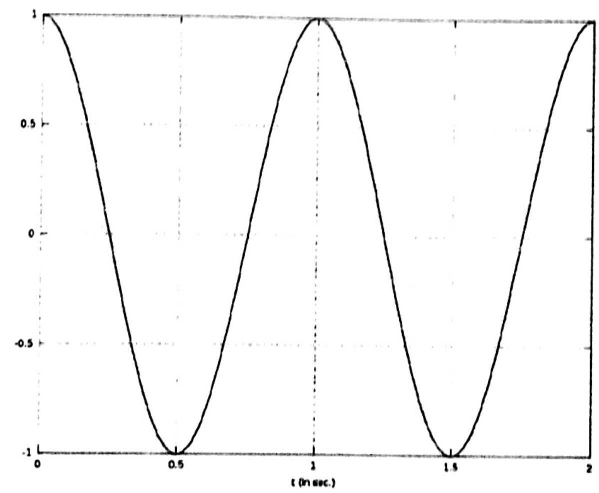
4 april 2012, 9:00-12:00 uur

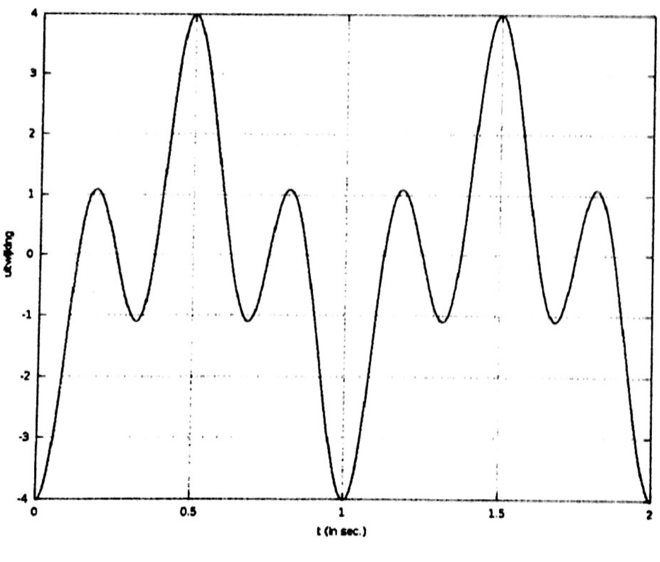
- Lees eerst een opgave volledig door alvorens deze te maken. Schrijf netjes en zorgvuldig.
- Bij dit tentamen is een formuleblad beschikbaar. Als je gebruik maakt van een formule van dit blad, vermeld dan het nummer van de formule. Andere literatuur, zoals het boek, mag niet geraadpleegd worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Voor antwoorden zonder toelichting (zelfs als het antwoord juist is) worden geen punten toegekend.
- Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. De opgaven 1, 3 en 4 zijn 2 punten waard, opgave 3 is 3 punten waard en je krijgt 1 punt cadeau.

Opgave 1: signalen en spectra

In de onderstaande figuren zijn 3 continue signalen (uitwijking als functie van de tijd) weergegeven.







(a) Geef voor ieder signaal een formule voor de uitwijking als functie van de tijd.
(b) Gegeven zijn de continue signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 2\sin(42\pi t) \\ x_1(t) &= \cos(2\pi t + \pi/4) \\ x_2(t) &= x(t)y(t) \end{aligned}$$

Schrijf ieder van deze signalen als een som van termen van de form $X_k e^{2\pi f_k t}$, waarbij f_k een frequentie (in Hz.) is en X_k de bijbehorende *complex amplitude*.
(c) Teken van ieder signaal het spectrum. Geef waarden langs de assen en geef voor de frequentiecomponenten aan wat de fase is.
(d) Wat is een AM-signaal en wat is een FM-signaal? Geef van beide typen signalen een voorbeeld.

Opgave 2: LTI-systemen
(a) Gegeven zijn de volgende vier systemen. Geef van ieder systeem aan of het (1) lineair, (2) tijds-invariant en (3) causaal is.

1 $y_1[n] = x[n] - x[n-1]$

2 $y_2[n] = x[n+1] - x[n]$

3 $y_3[n] = x[n] \cdot x[n-1]$

4 $y_4[n] = x[n^2] - x[n-1]$

Het FIR-systeem F_0 wordt gegeven door de unit impulse respons

$$h_0[n] = \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3].$$

(b) Wat is de uitvoer van het systeem F_0 als we op de invoer $x[n] = 3\delta[n] + \delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 1\delta[n-4]$ plaatsen?

(c) We hebben de beschikking over een (onbeperkte) voorraad van vier FIR-filtercomponenten. Deze componenten hebben de volgende impulserepsonses:

- $c_0[n] = \delta[n-1]$
- $c_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$
- $c_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$
- $c_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

Is het mogelijk om het FIR-systeem F_0 te bouwen met behulp van een serieschakeling van bovenstaande componenten? Zo ja, hoe? Zo nee, waarom niet? [Opmerking: een component mag vaker dan één keer gebruikt worden. Tevens hoeven niet alle componenten gebruikt te worden.]

(d) We analyseren een onbekend FIR systeem door het het bovenstaande signaal $x[n]$ aan te bieden. Het systeem geeft als uitvoer $y[n] = 6\delta[n] + 3\delta[n-1] + 23\delta[n-2] + 12\delta[n-3] + 13\delta[n-4] + 30\delta[n-5] + 11\delta[n-6] + \delta[n-7]$. Wat is de impulse response van dit systeem?

(e) We analyseren een onbekend FIR systeem door het twee signalen (x_1 en x_2) op de input aan te bieden. De bijbehorende uitvoeren zijn y_1 en y_2.

$$x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] \qquad y_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 4\delta[n-9] + 2\delta[n-10]$$
$$x_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] \qquad y_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-9] + 4\delta[n-10]$$

Gebruik de eigenschappen van een FIR-systeem om de uitvoer van dit systeem te bepalen als het de invoer $x[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$ aangeboden krijgt. Het is dus niet de bedoeling dat je de impulse reponse van dit systeem uitrekent.

(f) Een ander onbekend systeem bieden we ook twee invoeren (x_1 en x_2) aan. Het input/output-gedrag wordt gegeven door:

$$x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] \qquad y_1[n] = 2\delta[n] + 5\delta[n-1] + 8\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 4\delta[n-4]$$
$$x_2[n] = 4\delta[n-1] + 2\delta[n-2] \qquad y_2[n] = 2\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 16\delta[n-3] + 22\delta[n-4] + 8\delta[n-5]$$

Is dit systeem een FIR-filter? Zo ja, wat is de impulse response van dit systeem. Zo nee, waarom niet?

Opgave 3: Fourier analyse
(a) Bepaal de Fourier-coëfficienten van het signaal $x(t) = 3 + 2\cos(2\pi 9t) + 7\sin(2\pi 15t)$.

(b) Laat a_k de Fourier-coëfficienten van een periodiek signaal $x(t)$ zijn met periode T_0. Laat $y(t) = x(t+\alpha T_0)$, met $0 \leq \alpha < 1$. Toon aan dat de Fourier-coëfficienten b_k van y gegeven worden door $b_k = a_k \cdot e^{-j2\pi\alpha}$.
[Hint: gebruik de Fourier-synthese formule]

Gegeven is een periodiek signaal $x(t) = x(t+3)$ (voor alle t). Op het interval $0 \leq t < 3$ is $x(t)$ gedefiniëerd als

$$x(t) = \begin{cases} 1-t & \text{voor } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{voor } 1 \leq t < 2 \\ t-2 & \text{voor } 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

(c) Bepaal de DC-component van $x(t)$.

(d) Laat zien dat de Fourier-coëfficienten a_k van $x(t)$ (voor $k \neq 0$) gegeven worden door

$$a_k = \frac{1-\cos(\frac{2\pi}{3}k)}{2k^2\pi^2}$$

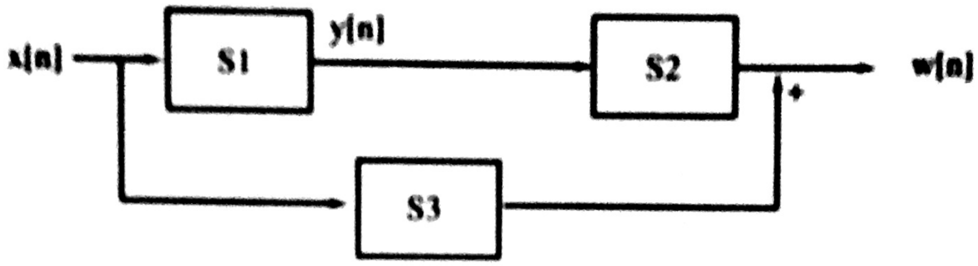
(e) Bepaal de Fourier-coëfficienten van het signaal $y(t) = 1 + x(t+1)$.

Opgave 4: z-transformaties en frequentie responses
(a) Laat $H_\omega(z)$ de volgende systeemfunctie zijn: $H_\omega(z) = 1 - (2\cos\hat{\omega})z^{-1} + z^{-2}$. Toon aan dat het systeem het signaal $x[n] = A\cos(n\hat{\omega} + \phi)$ volledig verwijderd.

(b) Geef de systeemfunctie van een systeem dat het signaal $x[n] = A_0 + A_1\cos(n\pi/6) + A_2\cos(n\pi/4)$ volledig verwijderd (waarbij A_0, A_1 en A_2 reële constanten zijn). Uiteraard wordt hier niet naar de constante functie $H(z) = 0$ gevraagd. Wat is de differentievergelijking van dit systeem?

(c) Een FIR-filter wordt beschreven door de differentievergelijking $y[n] = \Sigma_{k=0}^{9} x[n-k]$. Welke frequenties worden door dit systeem volledig verwijderd?

De onderstaande figuur toont de samenstelling van drie LTI systemen S_1, S_2 en S_3.



Het systeem S_1 wordt gegeven door de differentie-vergelijking $y[n] = x[n] - x[n-1]$. Het systeem S_2 wordt gegeven door de systeemfunctie $H(z) = 1 - z^{-1}$. Het systeem S_3 heeft de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j3\hat{\omega}}$.

Maak de onderstaande vragen (d)-(f). Kies zelf een handige volgorde.

(d) Wat is de differentievergelijking voor het totale (samengestelde) systeem?
(e) Wat is de impulsrespons van het totale (samengestelde) systeem?
(f) Wat is de systeemfunctie van het totale (samengestelde) systeem?

Appendix: Formuleblad Systemen en Signalen

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2) \tag{1}$$
$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k) \text{ voor gehele } k \tag{2}$$
$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \tag{3}$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \tag{4}$$
$$\cos(2\pi k) = 1 \text{ voor gehele } k \tag{5}$$
$$\cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) = 0 \text{ voor gehele } k \tag{6}$$
$$\cos(2\pi k + \pi) = -1 \text{ voor gehele } k \tag{7}$$
$$j^2 = -1 \tag{8}$$
$$Re(a + jb) = a \tag{9}$$
$$Im(a + jb) = b \tag{10}$$
$$(a + jb)^* = a - jb \tag{11}$$
$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{12}$$
$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \tag{13}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{14}$$
$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + c \tag{15}$$
$$\int t e^{\alpha t} dt = \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t} + c \tag{16}$$
$$x[n] = x(nT_s) \text{ Perfect A-to-D conversion} \tag{17}$$

$$f_s = \frac{1}{T_s} \text{ Sampling frequency} \tag{18}$$

$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{f_s} \text{ Normalized Radian Frequency} \tag{19}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]p(t - nT_s) \text{ Interpolation/Reconstruction} \tag{20}$$

$$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}, \quad -\infty < t < \infty \text{ Sinc pulse} \tag{21}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \text{ Fourier synthesis} \tag{22}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}\,dt \text{ Fourier analysis} \tag{23}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \text{ DFT (Discrete Fourier Transform)} \tag{24}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn} \text{ Inverse DFT} \tag{25}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \text{ FIR system} \tag{26}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \text{ Unit impulse response} \tag{27}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \text{ Convolution sum FIR-system} \tag{28}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \text{ General convolution} \tag{29}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\hat{\omega}k} \text{ Frequency response FIR-system} \tag{30}$$

$$h_1[n] * h_2[n] \leftrightarrow H_1(e^{j\hat{\omega}})H_2(e^{j\hat{\omega}}) \tag{31}$$

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L\sin(\hat{\omega}/2)} \text{ Dirichlet function} \tag{32}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N} x[k]z^{-k} \text{ Z-transform} \tag{33}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N} h[k]z^{-k} \text{ System function FIR system} \tag{34}$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \text{ Linearity of z-transform} \tag{35}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z) \text{ Convolution via z-domain} \tag{36}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{37}$$